

Решить задачу (Максимум 7 баллов)

Предприятие выпускает два вида мебели столы и тумбочки. Процесс отделки мебели состоит из этапов:

- 1) грунтование;
- 2) крашение;
- 3) лакирование.

На грунтование одного стола тратится 15 минут, на крашение – 30 минут и лакирование – 30 минут, а затем, продав его, получают прибыль 60 условных денежных единиц. При отделке одной тумбочки на грунтование тратится 30 минут, на крашение – 30 минут и лакирование – 15 минут, продав ее, получают прибыль 45 условных денежных единиц.

Найдите наибольшую прибыль от продажи мебели, если одновременно можно отделывать не более одного изделия и укажите, какое количество столов и тумбочек можно изготовить, если на грунтование выделено 10 часов, на крашение – 12 часов и лакирование – 10 часов.

Ответ:

наибольшая прибыль 1320 условных денежных единиц, необходимо производить 16 столов и 8 тумбочек.

Варианты решения задачи

Вариант 1 (методом подбора)

Составим таблицу:

	Грунтование	Крашение	Лакирование
Столы	15	30	30
Тумбочки	30	30	15
Ресурс (время), минут	$10 \cdot 60 = 600$	$12 \cdot 60 = 720$	$10 \cdot 60 = 600$

Заметим, что на крашение столов и тумбочек требуется одинаковое время, следовательно, максимально можно покрасить $720 : 30 = 24$ изделия.

Предположим, что изготавливается равное количество столов и тумбочек (12 и 12, может быть и другое начальное сочетание количества столов и тумбочек). Проверим, достаточно ли будет ресурса (время) на производство такого количества мебели:

$$\text{грунтование } 15 \cdot 12 + 30 \cdot 12 = 180 + 360 = 540 < 600;$$

$$\text{крашение } 30 \cdot 12 + 30 \cdot 12 = 360 + 360 = 720 = 720;$$

$$\text{лакирование } 30 \cdot 12 + 15 \cdot 12 = 360 + 180 = 540 < 600.$$

Тогда, **прибыль** будет равна $60 \cdot 12 + 45 \cdot 12 = 720 + 540 = 1260$ условных денежных единиц.

Видим, что ресурс (время) на грунтование и лакирование используется не полностью, следовательно, возможно получили не наибольшую прибыль. Проверим это.

Предположим, что столов изготавливается 13 штук, тогда тумбочек – 11 штук. Проверим, достаточно ли будет ресурса (время) на производство такого количества мебели:

$$\text{грунтование } 15 \cdot 13 + 30 \cdot 11 = 195 + 330 = 525 < 600;$$

$$\text{крашение } 30 \cdot 13 + 30 \cdot 11 = 390 + 330 = 720 = 720;$$

$$\text{лакирование } 30 \cdot 13 + 15 \cdot 11 = 390 + 165 = 555 < 600.$$

Прибыль в этом случае будет равна $60 \cdot 13 + 45 \cdot 11 = 780 + 495 = 1275$ условных денежных единиц.

Видим, что ресурс (время) на грунтование и лакирование опять используется не полностью, следовательно, возможно получили не наибольшую прибыль. Проверим это.

Аналогично проверяем, если столов изготавливается 14 штук, тогда тумбочек – 10 штук:

$$\text{грунтование } 15 \cdot 14 + 30 \cdot 10 = 210 + 300 = 510 < 600;$$

$$\text{крашение } 30 \cdot 14 + 30 \cdot 10 = 420 + 300 = 720 = 720;$$

$$\text{лакирование } 30 \cdot 14 + 15 \cdot 10 = 420 + 150 = 570 < 600.$$

Прибыль - $60 \cdot 14 + 45 \cdot 10 = 840 + 450 = 1290$ условных денежных единиц.

Проверяем, если столов изготавливается 15 штук, тогда тумбочек – 9 штук:

$$\text{грунтование } 15 \cdot 15 + 30 \cdot 9 = 225 + 270 = 495 < 600;$$

$$\text{крашение } 30 \cdot 15 + 30 \cdot 9 = 450 + 270 = 720 = 720;$$

$$\text{лакирование } 30 \cdot 15 + 15 \cdot 9 = 450 + 135 = 585 < 600.$$

Прибыль - $60 \cdot 15 + 45 \cdot 9 = 900 + 405 = 1305$ условных денежных единиц.

Проверяем, если столов изготавливается 16 штук, тогда тумбочек – 8 штук:

$$\text{грунтование } 15 \cdot 16 + 30 \cdot 8 = 240 + 240 = 480 < 600;$$

$$\text{крашение } 30 \cdot 16 + 30 \cdot 8 = 480 + 240 = 720 = 720;$$

$$\text{лакирование } 30 \cdot 16 + 15 \cdot 8 = 480 + 120 = 600 = 600.$$

Прибыль - $60 \cdot 16 + 45 \cdot 8 = 960 + 360 = 1320$ **условных денежных единиц.**

Проверяем, если столов изготавливается 17 штук, тогда тумбочек – 7 штук:

$$\text{грунтование } 15 \cdot 17 + 30 \cdot 7 = 255 + 210 = 465 < 600;$$

$$\text{крашение } 30 \cdot 17 + 30 \cdot 7 = 510 + 210 = 720 = 720;$$

$$\text{лакирование } 30 \cdot 17 + 15 \cdot 7 = 510 + 105 = 615 > 600.$$

Таким образом, если производить столов 17 штук, а тумбочек – 7 штук, время на крашение будет недостаточно ($615 > 600$). Следовательно, более 16 столов изготавливать нельзя.

Выясним, если наоборот, столов будем производить 11 штук, а тумбочек 13 штук:

$$\text{грунтование } 15 \cdot 11 + 30 \cdot 13 = 165 + 390 = 555 < 600;$$

крашение $30 \cdot 11 + 30 \cdot 13 = 330 + 390 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 11 + 15 \cdot 13 = 330 + 195 = 525 < 600$.

Прибыль - $60 \cdot 11 + 45 \cdot 13 = 660 + 585 = 1245$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 10 штук, а тумбочек 14 штук:

грунтование $15 \cdot 10 + 30 \cdot 14 = 105 + 420 = 525 < 600$;

крашение $30 \cdot 10 + 30 \cdot 14 = 300 + 420 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 10 + 15 \cdot 14 = 300 + 210 = 510 < 600$.

Прибыль - $60 \cdot 10 + 45 \cdot 14 = 600 + 630 = 1230$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 9 штук, а тумбочек 15 штук:

грунтование $15 \cdot 9 + 30 \cdot 15 = 135 + 450 = 585 < 600$;

крашение $30 \cdot 9 + 30 \cdot 15 = 270 + 450 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 9 + 15 \cdot 15 = 270 + 225 = 495 < 600$.

Прибыль - $60 \cdot 9 + 45 \cdot 15 = 540 + 675 = 1215$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 8 штук, а тумбочек 16 штук:

грунтование $15 \cdot 8 + 30 \cdot 16 = 120 + 480 = 600 = 600$;

крашение $30 \cdot 8 + 30 \cdot 16 = 240 + 480 = 720 = 720$;

лакирование $30 \cdot 8 + 15 \cdot 16 = 240 + 240 = 480 < 600$.

Прибыль - $60 \cdot 8 + 45 \cdot 16 = 480 + 720 = 1200$ условных денежных единиц.

Если столов будем производить 7 штук, а тумбочек 17 штук:

грунтование $15 \cdot 7 + 30 \cdot 17 = 105 + 510 = 615 > 600$.

Следовательно, если производить столов 7 штук, а тумбочек – 17 штук, то время на грунтование будет недостаточно ($615 > 600$).

Таким образом, наибольшая прибыль составит 1320 условных денежных единиц, если предприятие будет производить 16 столов и 8 тумбочек.

Вариант 2 (методом перебора вершин)

Составим таблицу:

	Грунтование	Крашение	Лакирование
Столы	15	30	30
Тумбочки	30	30	15
Ресурс (время), минут	$10 \cdot 60 = 600$	$12 \cdot 60 = 720$	$10 \cdot 60 = 600$

Пусть предприятие производит x штук столов и y штук тумбочек. Используя таблицу, запишем систему неравенств (время можно либо все использовать, либо недоиспользовать):

$$\begin{cases} 15x + 30y \leq 600 \\ 30x + 30y \leq 720 \\ 30x + 15y \leq 600 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ x + y \leq 24 \\ 2x + y \leq 40 \end{cases}.$$

Решим каждое неравенство на плоскости, а затем найдем общую область допустимых решений. Для этого запишем уравнения границ (прямых):

$$\begin{cases} x + 2y = 40 & (1) \\ x + y = 24 & (2) \\ 2x + y = 40 & (3) \end{cases} \text{ и построим их на плоскости:}$$

(1)

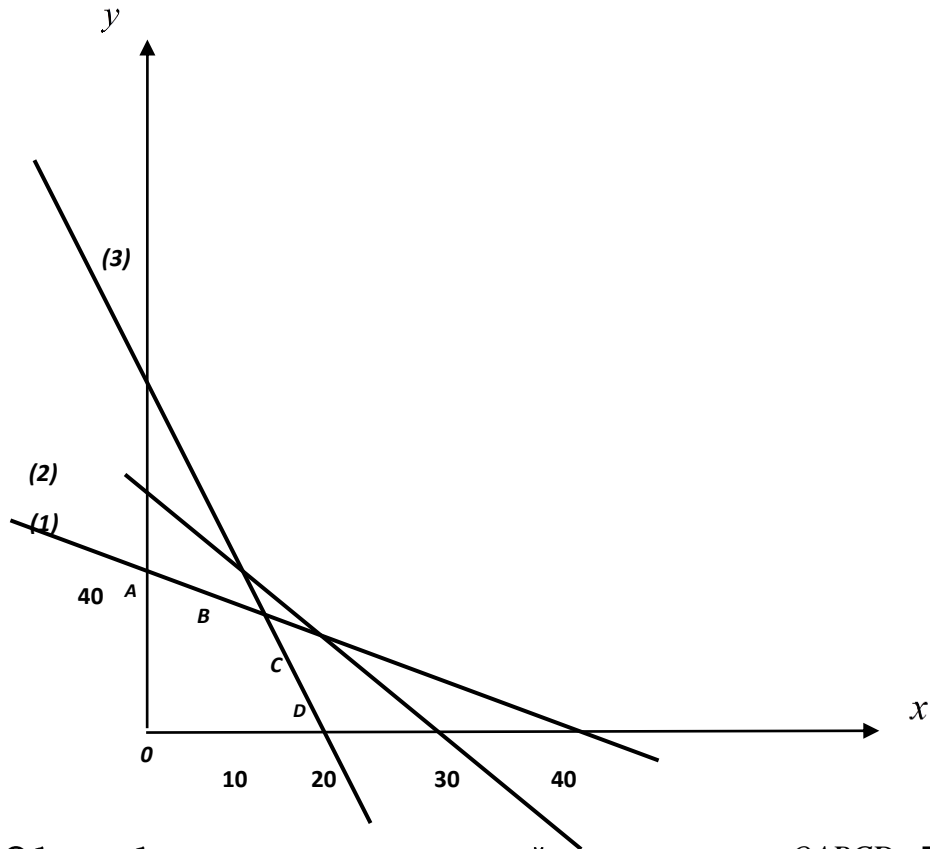
x	0	40
y	20	0

(2)

x	0	24
y	24	0

(3)

x	0	20
y	40	0



Общая область допустимых решений многоугольник $OABCD$. Если наилучшее решение существует, то оно достигается в угловой точке этого многоугольника. Решим задачу, сравнивая прибыль в каждой угловой точке, а для этого найдем координаты вершин многоугольника $OABCD$.

В точке $O(0;0)$ очевидно, что решение наилучшим быть не может.

Точка $A = (1) \cap \text{оси } OY$: $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ x = 0 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y = 20 \\ x = 0 \end{cases}$, т.е. $x=0$ будет

производиться столов, $y=20$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 0 + 45 \cdot 20 = 0 + 720 = 900$ условных денежных единиц.

Точка $B = (1) \cap (2)$: $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ x + y = 24 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y = 16 \\ x = 8 \end{cases}$, т.е. $x=8$ будет

производиться столов, $y=16$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 8 + 45 \cdot 16 = 480 + 720 = 1200$ условных денежных единиц.

Точка $C = (2) \cap (3): \begin{cases} x + y = 24 \\ 2x + y = 40 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y = 8 \\ x = 16 \end{cases}$, т.е. $x = 16$ будет

производиться столов, $y = 8$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 16 + 45 \cdot 8 = 960 + 360 = 1320$ условных денежных единиц.

Точка $D = (3) \cap \text{оси } OX: \begin{cases} 2x + y = 40 \\ y = 0 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} y = 0 \\ x = 20 \end{cases}$, т.е. $x = 20$ будет

производиться столов, $y = 0$ штук будет производиться тумбочек. Тогда **прибыль** будет равна: $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 20 + 45 \cdot 0 = 1200 + 0 = 1200$ условных денежных единиц.

Следовательно, наибольшую **прибыль 1320 условных денежных единиц предприятие получит, если будет производить 16 столов и 8 тумбочек.**

Вариант 3 (решение графическим методом)

Составим таблицу:

	Грунтование	Крашение	Лакирование
Столы	15	30	30
Тумбочки	30	30	15
Ресурс (время), минуты	$10 \cdot 60 = 600$	$12 \cdot 60 = 720$	$10 \cdot 60 = 600$

Пусть предприятие производит x штук столов и y штук тумбочек. Используя таблицу, запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} 15x + 30y \leq 600 \\ 30x + 30y \leq 720 \\ 30x + 15y \leq 600 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ x + y \leq 24 \\ 2x + y \leq 40 \end{cases}$$

Решим каждое неравенство на плоскости, а затем найдем общую область допустимых решений. Для этого запишем уравнения границ (прямых):

$$\begin{cases} x + 2y = 40 & (1) \\ x + y = 24 & (2) \\ 2x + y = 40 & (3) \end{cases} \text{ и построим их на плоскости:}$$

(1)

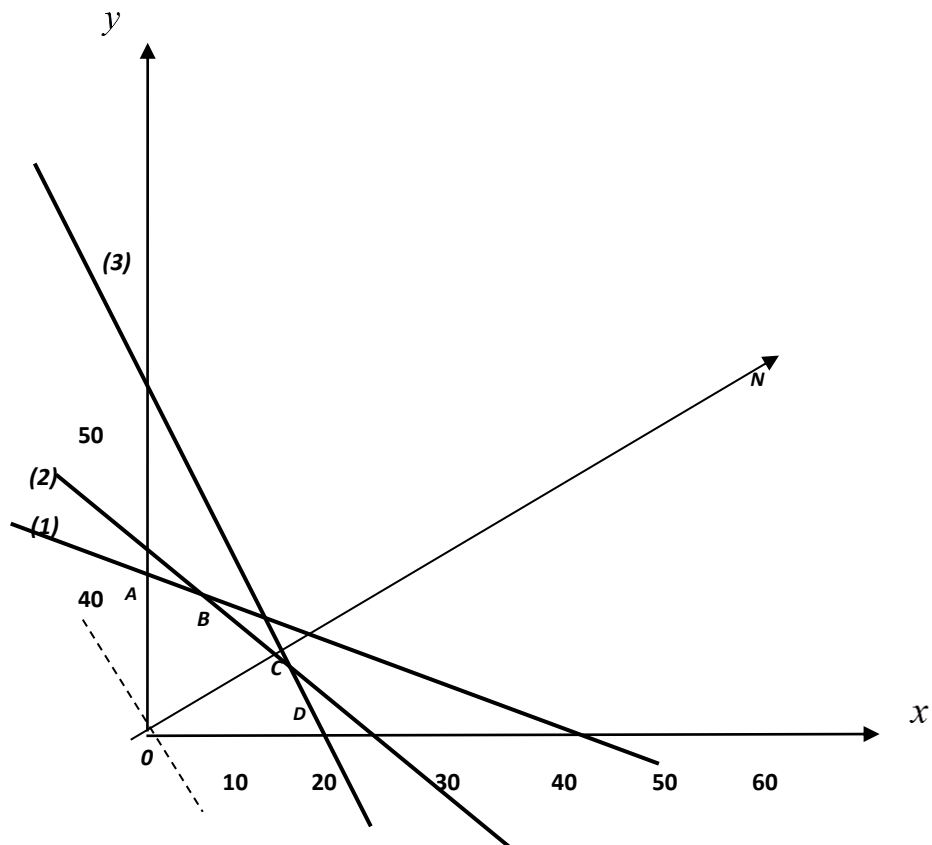
x	0	40
y	20	0

(2)

x	0	24
y	24	0

(3)

x	0	20
y	40	0



Общая область допустимых решений многоугольник $OABCD$. Если наилучшее решение существует, то оно достигается в угловой точке этого многоугольника. Выясним, в какой точке будет наилучшее решение задачи.

Прибыль предприятия будет находиться как $60 \cdot x + 45 \cdot y$. Построим вектор \overrightarrow{ON} , проходящий через точки $O(0;0)$ и $N(60;45)$, и построим прямую $60 \cdot x + 45 \cdot y = 0$ (пунктирная линия на графике):

x	0	15	-15
y	0	-20	20

Прямая $60 \cdot x + 45 \cdot y = 0$ перпендикулярна вектору \overrightarrow{ON} . Перемещая прямую $60 \cdot x + 45 \cdot y = 0$ параллельно самой себе по направлению вектора \overrightarrow{ON} (рост прибыли), найдем последнюю точку выхода из области допустимых решений. Это будет точка C . Найдем ее координаты:

$$C = (2) \cap (3): \begin{cases} x + y = 24 \\ 2x + y = 40 \end{cases}, \text{ следовательно, } \begin{cases} y = 8 \\ x = 16 \end{cases}, \text{ т.е. } x = 16 \text{ будет производиться}$$

столов, $y = 8$ штук будет производиться тумбочек. Тогда прибыль будет равна:
 $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 16 + 45 \cdot 8 = 960 + 360 = 1320$ **условных денежных единиц.**

Вариант 4 (на смекалку)

Составим таблицу:

	Грунтование	Крашение	Лакирование
Столы	15	30	30
Тумбочки	30	30	15
Ресурс (время), минуты	$10 \cdot 60 = 600$	$12 \cdot 60 = 720$	$10 \cdot 60 = 600$

Обозначим через x (штук) количество столов, производимых предприятием, через y (штук) - тумбочек. Тогда, используя таблицу, можно записать систему неравенств:

$$\begin{cases} 15x + 30y \leq 600 \\ 30x + 30y \leq 720 \\ 30x + 15y \leq 600 \end{cases}$$

Учитывая, что прибыль найдется как $60 \cdot x + 45 \cdot y$, заметим, что если сложить второе и третье неравенства в системе, то получим: $60 \cdot x + 45 \cdot y \leq 1320$. Следовательно, наибольшая прибыль 1320 условных денежных единиц. Найдем, при каких значениях x и y она достигается. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 60x + 45y = 1320 \\ 30x + 15y = 600 \end{cases}, \text{ следовательно, } \begin{cases} x = 16 \\ y = 8 \end{cases}$$

Таким образом, $x = 16$ **будет производиться столов**, $y = 8$ **штук будет производиться тумбочек**. **Прибыль при этом будет равна:**
 $60 \cdot x + 45 \cdot y = 60 \cdot 16 + 45 \cdot 8 = 960 + 360 = 1320$ **условных денежных единиц.**