

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНАЯ МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
«ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВО»

Профиль «Новые технологии»

Заключительный (очный) этап

2019 – 2020 учебный год

Задания для 8-9 класса

1. Решить задачу (10 баллов)

Насыпная плотность сухого песка равна $2,25 \text{ г/см}^3$, а плотность очень влажного песка, насыщенного водой, равна $2,7 \text{ г/см}^3$. Плотность воды 1 г/см^3 .

Найти среднюю плотность материала песчинок.

Решение

Объем насыпанного сухого песка состоит из двух частей: объема частичек песка V_1 и объема воздуха между ними V_2 . Насыпная плотность определяется формулой:

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1 + V_2}$$

где m – масса песка (всех песчинок).

Когда песок напитался водой, то вода заняла объем V_2 . В этом случае для плотности справедливо выражение

$$\rho_2 = \frac{m + \rho_v V_2}{V_1 + V_2}$$

где ρ_v – плотность воды

Подстановка данных из условия приводит к системе равенств

$$\begin{cases} 2,25 = \frac{m}{V_1 + V_2} \\ 2,7 = \frac{m + 1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} \end{cases}$$

Если вычесть из нижнего равенства верхнее – получится выражение, связывающее V_1 и V_2 :

$$0,45 = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$$

Отсюда

$$0,45 \cdot V_1 = 0,55 \cdot V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{9}{11} V_1.$$

Подстановка в первое равенство системы дает

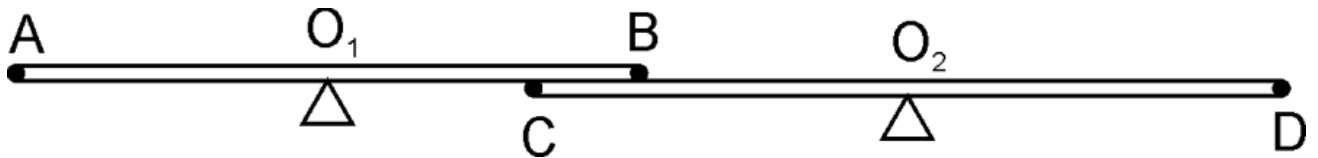
$$2,25 = \frac{m}{V_1 + \frac{9}{11} V_1} = \frac{m}{V_1} \cdot \frac{11}{20}$$

Отсюда искомая плотность песчинок

$$\rho_0 = \frac{m}{V_1} = 2,25 \cdot \frac{20}{11} \approx 4,1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

2. Решить задачу (20 баллов)

Две разные симметричные качели АВ и CD расположены так, как указано на рисунке. Длина качели АВ равна 12 м. Когда к точке А приложена сила F вверх, система находится в равновесии, если к точке D вниз приложена сила, значение которой находится в интервале от F/2 до 4F. Найдите расстояние между центрами качелей O₁ и O₂.



Решение

Введем обозначения: O₁O₂ = x, O₂C = O₂D = y, BC = z.

Минимальное усилие, удерживающее систему в равновесии, реализуется в положении на рис. 1:

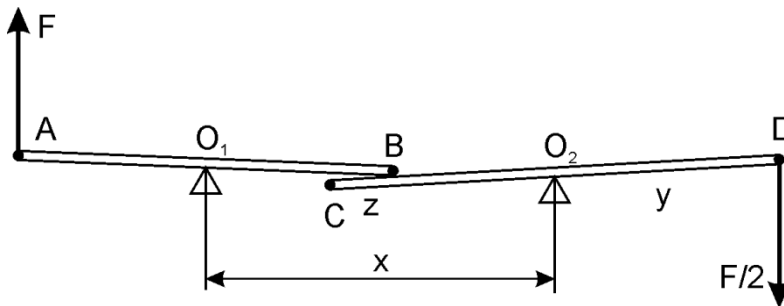


Рис. 1

Сила, действующая на точку В со стороны рычага CD, определяется по правилу моментов:

$$\frac{F}{2} \cdot y = F' \cdot (y - z) \Rightarrow F' = \frac{Fy}{2(y - z)}$$

Для равновесия рычага АВ эта сила должна равняться силе F (рычаг симметричен).

Поэтому

$$F = \frac{Fy}{2(y - z)} \Rightarrow z = \frac{y}{2}$$

Максимальное усилие, удерживающее систему в равновесии, реализуется в положении на рис. 2:

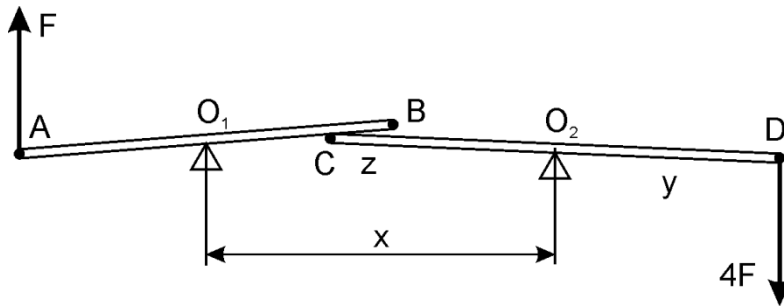


Рис. 2

Сила, действующая на точку C, равна $4F$ (рычаг CD симметричен). Согласно правилу моментов и с учетом условия задачи ($AB = 12 \text{ м} \Rightarrow O_1A = O_1B = 6 \text{ м}$)

$$4F \cdot (6 - z) = 6F$$

Отсюда $z = 4,5 \text{ м}$, и, с учетом полученного ранее, $y = 9 \text{ м}$.

Из рисунков видно: $x = 6 + y - z$. Подстановка и вычисление дают:

$$x = 6 + 9 - 4,5 = 10,5 \text{ м}$$

3. Решить задачу (30 баллов)

При плавании порожней рыболовной шхуны в одном из морей ватерлиния (уровень максимального погружения шхуны) находится на высоте $H_1 = 0,5$ м от поверхности воды, а в другом (более соленом) - на высоте $H_2 = 0,6$ м. При этом максимальная загрузка рыбой в первом море составляет $M_1 = 50$ т, а во втором – $M_2 = 63$ т. Найдите массу M_0 корабля без груза. Борты шхуны в рассматриваемом диапазоне погружений можно считать вертикальными.

Решение

Пусть S – площадь сечения корабля на уровне ватерлинии, ρ_1 – плотность воды первого моря, ρ_2 – плотность воды второго моря. Тогда для полной загрузки шхуны справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\rho_1 \cdot H_1 \cdot S &= M_1 \\ \rho_2 \cdot H_2 \cdot S &= M_2\end{aligned}\tag{1}$$

Если обозначить M_0 – массу пустой шхуны, V_0 – объем нижней части шхуны до ватерлинии, то, очевидно,

$$\begin{aligned}M_0 + \rho_1 \cdot H_1 \cdot S &= \rho_1 \cdot V_0 \\ M_0 + \rho_2 \cdot H_2 \cdot S &= \rho_2 \cdot V_0\end{aligned}$$

Отсюда

$$V_0 \cdot (\rho_2 - \rho_1) = S \cdot (\rho_2 \cdot H_2 - \rho_1 \cdot H_1)\tag{2}$$

Из системы (1) следует: $\frac{\rho_1 \cdot H_1}{\rho_2 \cdot H_2} = \frac{M_1}{M_2}$. Подстановка исходных данных задачи дает

$$\frac{\rho_1 \cdot 0,5}{\rho_2 \cdot 0,6} = \frac{50}{63} \Rightarrow \rho_2 = \frac{21}{20} \rho_1$$

Подстановка этого результата в (2) дает

$$V_0 \cdot \left(\frac{21}{20} \rho_1 - \rho_1 \right) = S \cdot \left(\frac{21}{20} \rho_1 \cdot 0,6 - \rho_1 \cdot 0,5 \right) \Rightarrow V_0 = 2,6 \cdot S$$

Масса пустой шхуны, очевидно, будет

$$M_0 = \rho_1 \cdot V_0 - \rho_1 \cdot H_1 \cdot S = \rho_1 \cdot 2,6 \cdot S - \rho_1 \cdot 0,5 \cdot S = 2,1 \cdot \rho_1 \cdot S\tag{3}$$

Первое равенство (1) приводит к выражению

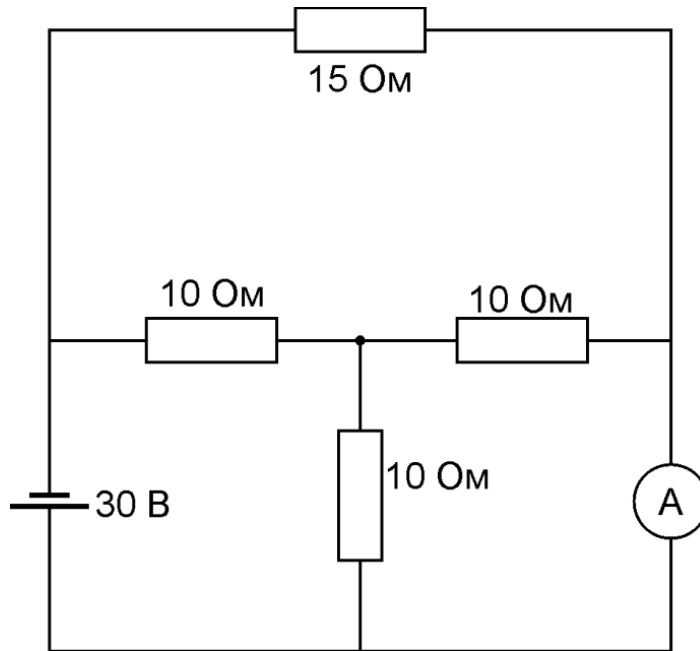
$$\rho_1 \cdot 0,5 \cdot S = 50 \Rightarrow \rho_1 \cdot S = 100 \text{ (т)}$$

Подстановка в (3) дает окончательный ответ: масса пустой шхуны

$$M_0 = 2,1 \cdot 100 = 210 \text{ (т)}$$

4. Решить задачу (30 баллов)

Что покажет амперметр на схеме? Сопротивление амперметра пренебрежимо мало



Решение

Определим сначала ток через батарейку. Для этого перерисуем схему, как на рис. 1.

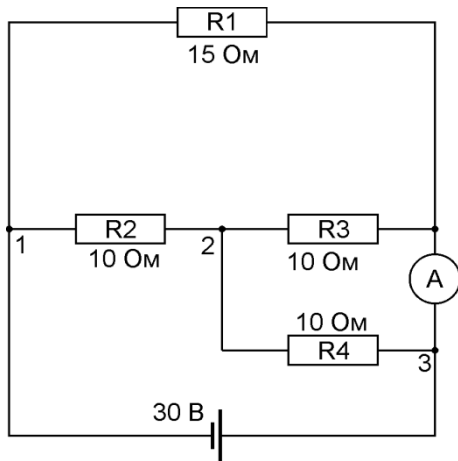


Рис. 1

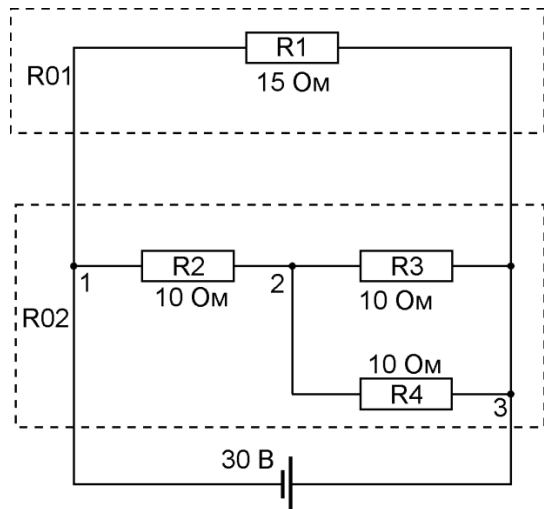


Рис. 2

Согласно условию задачи, сопротивление амперметра очень мало, поэтому для определения тока через источник его можно из схемы убрать (см. рис. 2). На этом рисунке видно, что схема состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений:

$$R_{01} = 15 \text{ Ом}$$

$$R_{02} = 10 + \frac{10}{2} = 15 \text{ Ом}$$

Поэтому полное сопротивление цепи будет $15/2 = 7,5 \text{ Ом}$, а ток через источник

$$I_0 = 30/7,5 = 4 \text{ А.}$$

На рис. 1 видно, что в развилке 3 ток через источник складывается из тока, проходящего через амперметр, и тока, проходящего через сопротивление R4:

$$I_0 = I_A + I_{R4} \quad (1)$$

Ток, идущий через R4, ищется таким образом. Так как R01 = R02, то в развилке 1 на R02 приходится половина тока I₀, т.е. 2 А. Этот ток течет через сопротивление R2 и в развилке 2 делится пополам между равными сопротивлениями R3 и R4. Таким образом, через R4 течет ток 1 А. Подставляя полученные результаты в (1), получаем 4 = I_A + 1, откуда получается окончательный ответ: I_A = 3 А.

5. Решить задачу (10 баллов)

Электрический чайник объемом 1 л имел в качестве нагревателя нихромовую проволоку. При подключении к розетке 220 В вода в полном чайнике нагревалась от температуры 20°C до кипения за 4 мин. Завод-изготовитель модернизировал чайник, в результате чего его объем увеличился, а проволоку нагревателя поставили тоже нихромовую той же массы, но вдвое меньшей длины. В результате полный чайник увеличенного объема при подключении к розетке 220 В стал нагревать воду от температуры 20°C до кипения за 2 мин. Считая, что потерь теплоты при нагревании воды не происходит, определить объем модернизированного чайника

Решение

Количество тепла, необходимое для нагрева воды, определяется по формуле:

$$Q = C \cdot m \cdot (t_2 - t_1)$$

где C – удельная теплоемкость воды, m – масса воды, t_1 – начальная температура воды, t_2 – конечная температура воды.

Вода нагревается электрическим током. Согласно закону Джоуля - Ленца

$$Q = \frac{U^2}{R} \cdot \Delta t$$

где U – напряжение в сети, R – сопротивление нагревателя, Δt – время работы нагревателя.

Таким образом, для работы обоих чайников справедливы равенства:

$$C \cdot m_1 \cdot (t_2 - t_1) = \frac{U^2}{R_1} \cdot \Delta t_1$$

$$C \cdot m_2 \cdot (t_2 - t_1) = \frac{U^2}{R_2} \cdot \Delta t_2$$

Если первое равенство разделить на второе, то получится

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \quad (1)$$

Согласно известной формуле $R_1 = \rho \frac{l_1}{S_1}$; $R_2 = \rho \frac{l_2}{S_2}$,

где ρ - удельное сопротивление нихрома, l_1 и l_2 – длины проволок в нагревателях, S_1 и S_2 – площади сечения проволок.

Согласно условию задачи, проволоку нагревателя оставили той же массы, но укоротили вдвое. Поэтому площадь сечения проволоки должна быть увеличена в 2 раза. Тогда сопротивление второго нагревателя

$$R_2 = \rho \frac{l_1/2}{2 \cdot S_1} = \frac{1}{4} \cdot \rho \frac{l_1}{S_1} = \frac{1}{4} \cdot R_1$$

Масса 1 л воды равна 1 кг. Подставив полученные и исходные данные задачи в (1), получим:

$$\frac{1}{m_2} = \frac{\frac{1}{4} R_1}{R_1} \cdot \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$$

Отсюда масса воды в новом чайнике равна 2 кг, а ее объем – 2 л.