

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНАЯ МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА  
«ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВО»

Профиль «Ресурсосберегающие технологии»

Заключительный этап

2021 – 2022 учебный год

Задания для 10-11 класса

Вариант 1

**1. Решите задачу**

Гена и Эдуард накопили одинаковые суммы денег и решили преумножить свой капитал.

Гена 20% своего капитала вложил в криптовалютный фонд с доходностью  $x$  % годовых, а оставшуюся часть денегложил на сберегательный счет с доходностью  $y$  % годовых.

Эдуард 80 % капитала вложил в венчурный фонд с доходностью  $x$  % годовых, а оставшуюся часть денег инвестировал в золото с доходностью  $y$  % годовых.

В результате через год у Геннадия на счетах оказалось суммарно 450 тысяч, а у Эдуарда 300 тысяч.

Через 2 года у Геннадия оказалось суммарно 500 тысяч.

Сколько денег оказалось на счетах Эдуарда через 2 года?

**Решение**

Пусть  $S$  - сумма первоначальных накоплений

$$p = 1 + x/100$$

$$k = 1 + y/100$$

Тогда через год на счетах у Геннадия оказалось (в тыс.):

$$0,2S \cdot p + 0,8S \cdot k = 450$$

У Эдуарда:

$$0,8S \cdot p + 0,2S \cdot k = 300$$

Через два года у Геннадия:

$$0,2S \cdot p^2 + 0,8S \cdot k^2 = 500$$

У Эдуарда:

$$0,8S \cdot p^2 + 0,2S \cdot k^2$$

Решая получившуюся систему:

$$\begin{cases} 0,2S \cdot p + 0,8S \cdot k = 450 \\ 0,2S \cdot p^2 + 0,8S \cdot k^2 = 500 \\ 0,8S \cdot p + 0,2S \cdot k = 300 \end{cases}$$

Получаем:

$$S=425$$

$$p=10/17$$

$$k=20/17$$

Тогда:

$$0,8S \cdot p^2 + 0,2S \cdot k^2 = \frac{4000}{17}$$

**Ответ:** 4000/17

### **Критерии**

Правильно составленная математическая модель: 5 баллов

Правильно составлена математическая модель и получен неверный ответ в результате арифметической ошибки: 10 баллов

Правильно составленная математическая модель и найдена сумма первоначальных накоплений и/или значение  $p$  и/или значение  $q$ : 20 баллов

Обоснованно получен правильный ответ: 25 баллов

## 2. Решите уравнение

$$\frac{\cos\left(\pi\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\right) - 1}{\sqrt{4x - 4x^2 + 8} - \sqrt{5}} = 0$$

Решение принимает вид:

$$\begin{cases} \cos\left(\pi\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\right) - 1 = 0 \\ 4x - 4x^2 + 8 \geq 0 \\ \sqrt{4x - 4x^2 + 8} \neq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - x^2 = 2n & n \in \mathbb{Z} \\ -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1,5 \\ x \neq -0,5 \end{cases}$$

**Ответ:**  $x=0,5$

### Критерии

Решение сведено к верной равносильной системе: 2 балла

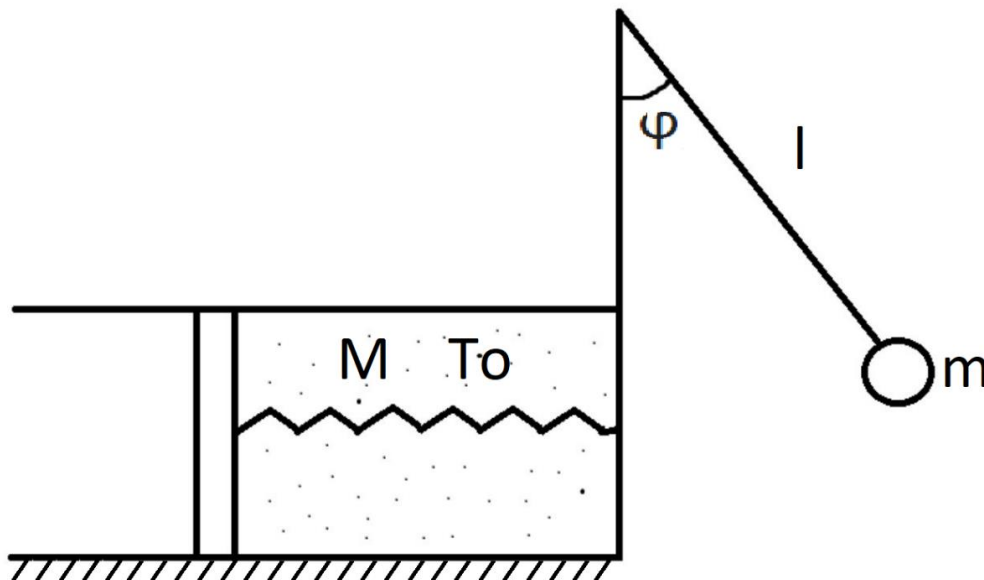
Решение сведено к равносильной системе и верному перебору возможных целых значений  $n$ , но содержит лишний корень: 10 баллов

Обоснованно получен правильный ответ: 25 баллов

### 3. Решите задачу

Ко дну лежащего цилиндра прикреплена пружина, соединяющая его с невесомым поршнем. Под поршнем находится газ массы 1 г при температуре 84 К. В определенный момент времени математический маятник с грузом массы 7,5 кг и длиной 2 м оттягивают на некоторый угол  $\varphi$ .

Определите косинус угла  $\varphi$ , на который необходимо оттянуть этот маятник, чтобы объем газа под поршнем увеличился в 1,5 раза, если при абсолютно неупругом соударении в тепловую энергию, передающуюся через тонкую стенку газу, выделяется 0,8 общей энергии удара, а остальная энергия уходит на деформацию шарика. Удельная теплоемкость газа -  $1040 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ , в нерастянутом состоянии длина пружины пренебрежимо мала. Считать, что поршень находится в вакууме.



#### Решение

Часть кинетической энергии массы перейдет в тепловую газа:

$$Q = CM\Delta T = \gamma \frac{mv^2}{2} = \gamma K$$

(где  $M$ -масса газа)

Потенциальная энергия шара в начальный момент времени:

$$\Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

В момент столкновения шара и основания цилиндра вся потенциальная энергия переходит в кинетическую

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

Тогда:

$$Q = \gamma K$$

$$CM\Delta T = \gamma mgl(1 - \cos(\varphi))$$

$$\Delta T = \frac{m g l \gamma}{M C} (1 - \cos(\varphi))$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} p_0 V_0 &= \nu R T_0 \\ \nu &= \frac{p_0 V_0}{R T_0} = \frac{p_0 S H_0}{R T_0} \\ p_1 V_1 &= \nu R T_1 \\ p_1 V_1 &= p_1 S H_1 = \frac{p_0 S H_0}{R T_0} R T_1 \\ p_1 H_1 &= \frac{p_0 H_0}{T_0} T_1 \\ T_1 &= \frac{p_1 H_1}{p_0 H_0} T_0 \\ \Delta T &= T_1 - T_0 \end{aligned}$$

Пользуясь законом баланса сил для поршня, запишем:

$$\begin{aligned} p_1 S &= k_1 H_1 \\ p_0 S &= k_1 H_0 \\ \frac{p_1}{p_0} &= \frac{H_1}{H_0} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1 - T_0 = \left( \frac{p_1 H_1}{p_0 H_0} - 1 \right) T_0 \\ \Delta T &= T_1 - T_0 = \left( \frac{H_1^2}{H_0^2} - 1 \right) T_0 \\ H_1 &= \beta H_0 \\ \Delta T &= (\beta^2 - 1) T_0 \end{aligned}$$

Приравнивая полученные  $\Delta T$  получим:

$$\Delta T = (\beta^2 - 1) T_0 = \frac{m g l \gamma}{M C} (1 - \cos(\varphi))$$

В итоге получаем ответ:

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{M C}{m g l \gamma} (\beta^2 - 1) T_0$$

**Ответ:** 0,09

### Критерии:

Максимальный балл 25.

- Если получен правильный ответ и не допущено ошибок в решении ставится 25 баллов.
- Если получен неправильный ответ, но ошибка в том, что где то потеряна одна величина, то ставится 20 баллов. То есть задача, по сути, решена правильно, но допущена незначительная ошибка по невнимательности.

- Если задача не решена, но написано, что

$$CM\Delta T = \gamma K$$

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

$$pV = \nu RT$$

И показано общее понимания способа решения задачи, то ставится 15 баллов.

- Если задача не решена, но написано, что

$$pV = \nu RT$$

$$\Delta T = T_1 - T_0 = \left(\frac{H_1^2}{H_0^2} - 1\right)T_0$$

Или

$$CM\Delta T = \gamma K$$

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

То ставится 10 баллов.

- Если задача не решена и написано, что

$$pV = \nu RT$$

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

А также на словах сформулирован принцип решения задачи (про то, что потенциальная энергия переходит в кинетическую, затем в тепловую, что и вызывает расширение газа) то ставится 5 баллов.

#### 4. Решите задачу

Маленький шарик массы 4 кг катится по горизонтальной поверхности со скоростью 10 м/с. В некоторый момент времени он заезжает на незакрепленную горку массы 60 кг, стоящую на гладкой поверхности. Как высоко он закатится?

#### Решение

Закон сохранения энергии:

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \text{const} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Закон сохранения импульса:

$$mv_x + Mu = \text{const} = mv_0$$

Когда шар перестанет катиться вверх  $v_y = 0$   $v_x = u$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = u^2$$

В таком случае:

$$mgH + \frac{mu^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mu + Mu = mv_0$$

$$u = \frac{mv_0}{m + M}$$

$$mgH = \frac{1}{2}(mv_0^2 - mu^2 - Mu^2)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - u^2 - \frac{M}{m} u^2 \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - \left(1 + \frac{M}{m}\right) u^2 \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{(mv_0)^2}{(m + M)^2} \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - m(m + M) \frac{(v_0)^2}{(m + M)^2} \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - \frac{m}{m + M} v_0^2 \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( 1 - \frac{m}{m + M} \right) v_0^2$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( \frac{m + M - m}{m + M} \right) v_0^2$$

$$H = \frac{M}{m + M} \frac{v_0^2}{2g}$$

**Ответ:** 4,6875м

### Критерии:

Максимальный балл 5.

- Если получен правильный ответ и не допущено ошибок в решении ставится 25 баллов.
- Если получен неправильный ответ, но ошибка в том, что где то потеряна одна величина, то ставится 20 баллов. То есть задача, по сути, решена правильно, но допущена незначительная ошибка по невнимательности.
- Если не получен правильный ответ, но написаны законы сохранения энергии и импульса

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = const = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mv_x + Mu = const = mv_0$$

А также сказано, что скорость шара, когда он дойдет до своего наивысшего положения  $v_x = u$ , то ставится 15 баллов

- Если не получен правильный ответ, но написаны законы сохранения энергии и импульса

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = const = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mv_x + Mu = const = mv_0$$

А также сказано, что скорость шара, когда он дойдет до своего наивысшего положения  $v_y = 0$ , то ставится 10 баллов

- Если не получен правильный ответ, но написаны законы сохранения энергии и импульса

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = const = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mv_x + Mu = const = mv_0$$

То ставится 5 баллов.



МЕЖДИСЦИПЛИНАРНАЯ МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА  
«ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВО»

Профиль «Ресурсосберегающие технологии»

Заключительный этап

2021 – 2022 учебный год

Задания для 10-11 класса

Вариант 2

**1. Решите задачу**

Гена и Эдуард накопили одинаковые суммы денег и решили преумножить свой капитал.

Гена 20% своего капитала вложил в криптовалютный фонд с доходностью  $x$  % годовых, а оставшуюся часть денегложил на сберегательный счет с доходностью  $y$  % годовых.

Эдуард 80 % капитала вложил в венчурный фонд с доходностью  $x$  % годовых, а оставшуюся часть денег инвестировал в золото с доходностью  $y$  % годовых.

В результате через год у Геннадия на счетах оказалось суммарно 450 тысяч, а у Эдуарда 300 тысяч.

Через 2 года у Геннадия оказалось суммарно 500 тысяч.

Сколько денег оказалось на счетах Эдуарда через 2 года?

**Решение**

Пусть  $S$  - сумма первоначальных накоплений

$$p = 1 + x/100$$

$$k = 1 + y/100$$

Тогда через год на счетах у Геннадия оказалось (в тыс.):

$$0,2S \cdot p + 0,8S \cdot k = 450$$

У Эдуарда:

$$0,8S \cdot p + 0,2S \cdot k = 300$$

Через два года у Геннадия:

$$0,2S \cdot p^2 + 0,8S \cdot k^2 = 500$$

У Эдуарда:

$$0,8S \cdot p^2 + 0,2S \cdot k^2$$

Решая получившуюся систему:

$$\begin{cases} 0,2S \cdot p + 0,8S \cdot k = 450 \\ 0,2S \cdot p^2 + 0,8S \cdot k^2 = 500 \\ 0,8S \cdot p + 0,2S \cdot k = 300 \end{cases}$$

Получаем:

$$S=425$$

$$p=10/17$$

$$k=20/17$$

Тогда:

$$0,8S \cdot p^2 + 0,2S \cdot k^2 = \frac{4000}{17}$$

**Ответ:** 4000/17

### **Критерии**

Правильно составленная математическая модель: 5 баллов

Правильно составлена математическая модель и получен неверный ответ в результате арифметической ошибки: 10 баллов

Правильно составленная математическая модель и найдена сумма первоначальных накоплений и/или значение  $p$  и/или значение  $q$ : 20 баллов

Обоснованно получен правильный ответ: 25 баллов

## 2. Решите уравнение

$$\frac{\cos\left(\pi\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\right) - 1}{\sqrt{4x - 4x^2 + 8} - \sqrt{5}} = 0$$

Решение принимает вид:

$$\begin{cases} \cos\left(\pi\left(\frac{1}{4} - x^2\right)\right) - 1 = 0 \\ 4x - 4x^2 + 8 \geq 0 \\ \sqrt{4x - 4x^2 + 8} \neq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - x^2 = 2n & n \in \mathbb{Z} \\ -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq 1,5 \\ x \neq -0,5 \end{cases}$$

**Ответ:**  $x=0,5$

### Критерии

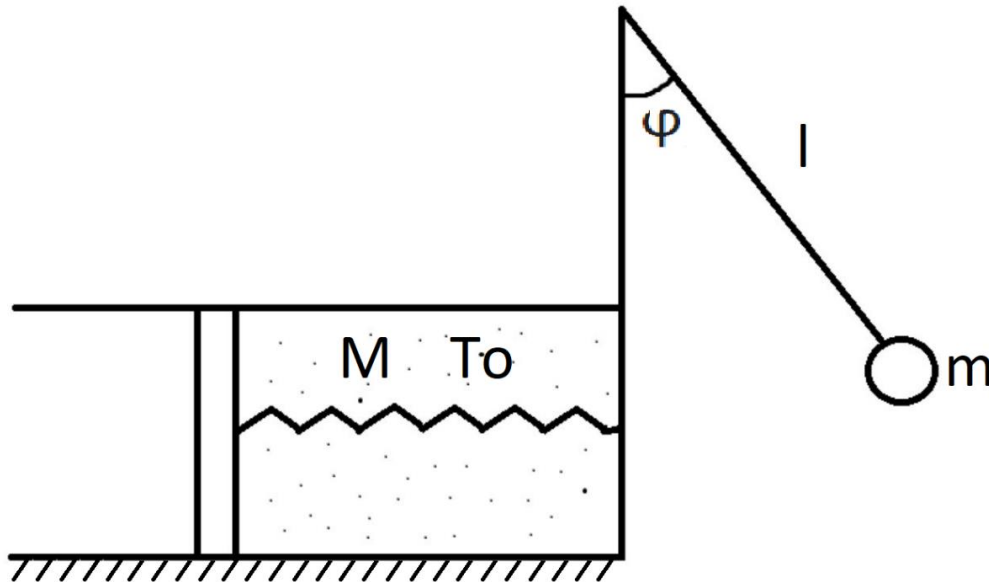
Решение сведено к верной равносильной системе: 2 балла

Решение сведено к равносильной системе и верному перебору возможных целых значений  $n$ , но содержит лишний корень: 10 баллов

Обоснованно получен правильный ответ: 25 баллов

### 3. Решите задачу

Ко дну лежащего цилиндра прикреплена пружина, соединяющая его с невесомым поршнем. Под поршнем находится газ массой 1 г при температуре 100 к. В определенный момент времени математический маятник с грузом массы 7,935 кг и длиной 2 м оттягивают на некоторый угол  $\varphi$ . Определите косинус угла  $\varphi$ , на который необходимо оттянуть этот маятник, чтобы объем газа под поршнем увеличился в 1,3 раза, если при абсолютно неупругом соударении в тепловую энергию, передающуюся через тонкую стенку газу, выделяется 0,5 общей энергии удара, а оставшаяся энергия уходит на деформацию шарика. Удельная теплоемкость газа –  $920 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$ , в нерастянутом состоянии длина пружины пренебрежимо мала. Считать, что поршень находится в вакууме.



#### Решение

Часть кинетической энергии массы перейдет в тепловую газа:

$$Q = CM\Delta T = \gamma \frac{mv^2}{2} = \gamma K$$

(где  $M$ -масса газа)

Потенциальная энергия шара в начальный момент времени:

$$\Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

В момент столкновения шара и основания цилиндра вся потенциальная энергия переходит в кинетическую

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

Тогда:

$$Q = \gamma K$$

$$CM\Delta T = \gamma mgl(1 - \cos(\varphi))$$

$$\Delta T = \frac{m g l \gamma}{M C} (1 - \cos(\varphi))$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} p_0 V_0 &= \nu R T_0 \\ \nu &= \frac{p_0 V_0}{R T_0} = \frac{p_0 S H_0}{R T_0} \\ p_1 V_1 &= \nu R T_1 \\ p_1 V_1 &= p_1 S H_1 = \frac{p_0 S H_0}{R T_0} R T_1 \\ p_1 H_1 &= \frac{p_0 H_0}{T_0} T_1 \\ T_1 &= \frac{p_1 H_1}{p_0 H_0} T_0 \\ \Delta T &= T_1 - T_0 \end{aligned}$$

Пользуясь законом баланса сил для поршня, запишем:

$$\begin{aligned} p_1 S &= k_1 H_1 \\ p_0 S &= k_1 H_0 \\ \frac{p_1}{p_0} &= \frac{H_1}{H_0} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \Delta T = T_1 - T_0 &= \left( \frac{p_1 H_1}{p_0 H_0} - 1 \right) T_0 \\ \Delta T = T_1 - T_0 &= \left( \frac{H_1^2}{H_0^2} - 1 \right) T_0 \\ H_1 &= \beta H_0 \\ \Delta T &= (\beta^2 - 1) T_0 \end{aligned}$$

Приравнивая полученные  $\Delta T$  получим:

$$\Delta T = (\beta^2 - 1) T_0 = \frac{m g l \gamma}{M C} (1 - \cos(\varphi))$$

В итоге получаем ответ:

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{M C}{m g l \gamma} (\beta^2 - 1) T_0$$

**Ответ:** 0,2

**Критерии:**

Максимальный балл 25.

- Если получен правильный ответ и не допущено ошибок в решении ставится 25 баллов.
- Если получен неправильный ответ, но ошибка в том, что где то потеряна одна величина, то ставится 20 баллов. То есть задача, по сути, решена правильно, но допущена незначительная ошибка по невнимательности.

- Если задача не решена, но написано, что

$$CM\Delta T = \gamma K$$

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

$$pV = \nu RT$$

И показано общее понимание способа решения задачи, то ставится 15 баллов.

- Если задача не решена, но написано, что

$$pV = \nu RT$$

$$\Delta T = T_1 - T_0 = \left(\frac{H_1^2}{H_0^2} - 1\right)T_0$$

Или

$$CM\Delta T = \gamma K$$

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

То ставится 10 баллов.

- Если задача не решена и написано, что

$$pV = \nu RT$$

$$K = \Pi = mgl(1 - \cos(\varphi))$$

А также на словах сформулирован принцип решения задачи (про то, что потенциальная энергия переходит в кинетическую, затем в тепловую, что и вызывает расширение газа) то ставится 5 баллов.

**4. Решите задачу**

Маленький шарик массы 10 кг катится по горизонтальной поверхности со скоростью 14 м/с. В некоторый момент времени он заезжает на незакрепленную горку массой 70 кг, стоящую на гладкой поверхности. Как высоко он закатится?

**Решение**

Закон сохранения энергии:

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \text{const} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Закон сохранения импульса:

$$mv_x + Mu = \text{const} = mv_0$$

Когда шар перестанет катиться вверх  $v_y = 0$   $v_x = u$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = u^2$$

В таком случае:

$$mgH + \frac{mu^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mu + Mu = mv_0$$

$$u = \frac{mv_0}{m + M}$$

$$mgH = \frac{1}{2}(mv_0^2 - mu^2 - Mu^2)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - u^2 - \frac{M}{m} u^2 \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - \left(1 + \frac{M}{m}\right) u^2 \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{(mv_0)^2}{(m + M)^2} \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - m(m + M) \frac{(v_0)^2}{(m + M)^2} \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - \frac{m}{m + M} v_0^2 \right)$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( 1 - \frac{m}{m + M} \right) v_0^2$$

$$H = \frac{1}{2g} \left( \frac{m + M - m}{m + M} \right) v_0^2$$

$$H = \frac{M}{m + M} \frac{v_0^2}{2g}$$

**Ответ:** 8,575м

### Критерии:

Максимальный балл 5.

- Если получен правильный ответ и не допущено ошибок в решении ставится 25 баллов.
- Если получен неправильный ответ, но ошибка в том, что где то потеряна одна величина, то ставится 20 баллов. То есть задача, по сути, решена правильно, но допущена незначительная ошибка по невнимательности.
- Если не получен правильный ответ, но написаны законы сохранения энергии и импульса

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = const = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mv_x + Mu = const = mv_0$$

А также сказано, что скорость шара, когда он дойдет до своего наивысшего положения  $v_x = u$ , то ставится 15 баллов

- Если не получен правильный ответ, но написаны законы сохранения энергии и импульса

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = const = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mv_x + Mu = const = mv_0$$

А также сказано, что скорость шара, когда он дойдет до своего наивысшего положения  $v_y = 0$ , то ставится 10 баллов

- Если не получен правильный ответ, но написаны законы сохранения энергии и импульса

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = const = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$mv_x + Mu = const = mv_0$$

То ставится 5 баллов.