olimp.tech

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНАЯ МНОГОПРОФИЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА

«ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВО»

Профиль «Новые технологии»

Заключительный этап

2022 – 2023 учебный год

Задания для 10-11 класса

1. Решить задачу (10 баллов)

Самолёт летит горизонтально по прямой со скоростью 900 км/ч. Собираясь сделать поворот в горизонтальной плоскости, летчик увеличил скорость на 10%. Какого радиуса окружность самолет опишет при повороте? Каков при этом угол наклона плоскости крыльев самолёта? Во сколько раз при повороте увеличится вес пилота? Подъёмная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев и пропорциональна квадрату скорости самолета (коэффициент пропорциональности в горизонтальном полете и при повороте считается одинаковым). Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

РЕШЕНИЕ

Скорость самолета в горизонтальном полете v_0 = 900 км/ч = 250 м/с. В горизонтальном полете подъемная сила уравновешивает силу тяжести:

$$mg = kv_0^2 \Rightarrow k = \frac{mg}{v_0^2}$$ (k – коэффициент пропорциональности).

А) При повороте скорость самолета возрастает на 10%: $v = 1{,}1 \cdot v_0$. Самолет наклоняется к горизонту под углом α, подъемная сила $\vec{F}_P$ действует перпендикулярно плоскости самолета (см. рис. 1). Второй закон Ньютона для самолета в повороте

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_P$$

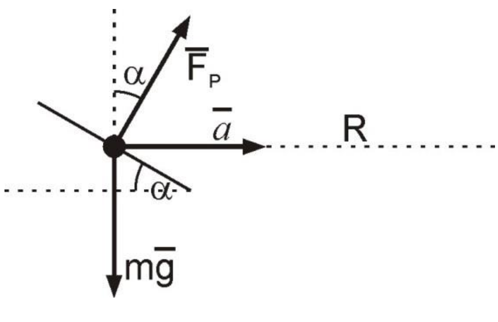


Рис. 1

Проекция этого равенства на вертикальное направление приводит к действиям:

$$F_P \cdot \cos(\alpha) = mg;$$

$$kv^2 \cdot \cos(\alpha) = mg;$$

$$\frac{mg}{v_0^2} \cdot v^2 \cdot \cos(\alpha) = mg \Rightarrow \cos(\alpha) = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{1{,}1}\right)^2 = 0{,}826 \Rightarrow \alpha = 34{,}2^0$$

Б) Проекция векторного равенства на горизонтальное направление приводит к действиям:

$$ma = F_P \cdot \sin(\alpha); \Rightarrow m\frac{v^2}{R} = kv^2 \cdot \sin(\alpha); \Rightarrow \frac{m}{R} = k \cdot \sin(\alpha);$$

$$\frac{m}{R} = \frac{mg}{v_0^2} \cdot \sin(\alpha); \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g \cdot \sin(\alpha)}$$

Подстановка дает значение радиуса окружности, которую опишет самолет:

$$R = \frac{250^2}{10 \cdot \sin\left(34,2^0\right)} = 11119 \text{ м} = 11,12 \text{ км}$$

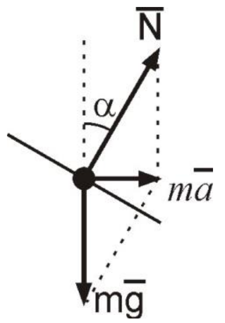


Рис. 2

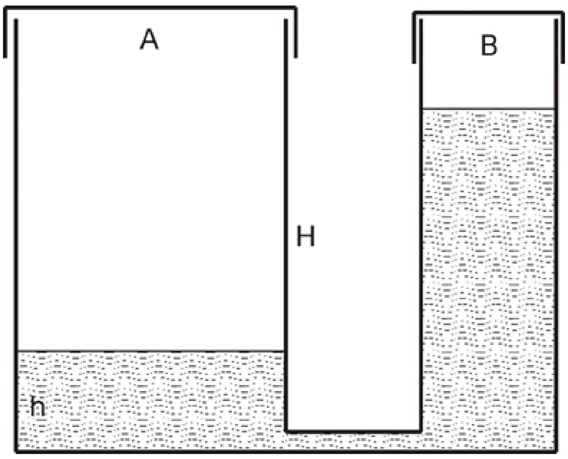
В) Силы, действующие на летчика, изображены на рис. 2.

Из рисунка видно, что $N = \dfrac{mg}{\cos(\alpha)} = mg \cdot 1,21$

Вес пилота увеличится в 1,21 раза.

Ответ: угол наклона самолета в повороте 34,2°, радиус окружности поворота 11,12 км, вес пилота при повороте увеличится в 1,21 раза

2. Решить задачу (30 баллов)



Два цилиндрических сосуда одинаковой высоты H = 2 м соединены внизу тонкой трубкой пренебрежимо малого объема (см. рис.). Площадь поперечного сечения сосуда A 50 см^2, сосуда B – 25 см^2. Сосуд A был плотно закрыт крышкой, сосуд B – открыт. Сначала в сосудах находился сухой воздух при давлении 100 кПа. Затем в сосуд B при неизменной температуре вылили 5 л воды, капнули сверху каплю растительного масла и плотно закрыли крышкой. Через длительное время уровень воды в сосуде A составил h = 15 см.

Чему равно давление насыщенных паров воды при температуре опыта?

РЕШЕНИЕ

А) Определим состояние системы сразу после того, как в сосуд В налили воду. При этом воздух в сосуде А сжался, его состояние подчиняется закону Бойля – Мариотта. Обозначим P0 – начальное давление воздуха, P1 – получившееся давление в сосуде А, ρ - плотность воды, V – ее объем. Для сосуда А h1 – высота уровня воды в сосуде, S1 – площадь его поперечного сечения. Для сосуда В h2 – высота уровня воды в сосуде, S2 – площадь его поперечного сечения (см. рис. 3).

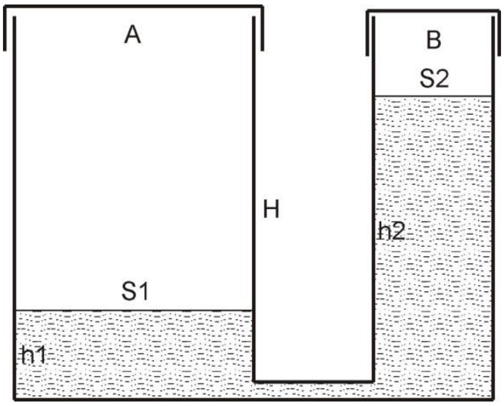


Рис. 3

Для воздуха в сосуде А справедливы соотношения:

Закон Бойля – Мариотта $P0 \cdot H = P1 \cdot (H - h1)$

Давление P1: $P1 = P0 + \rho \cdot g \cdot (h2 - h1)$

Связь между высотами воды в сосудах: $S1 \cdot h1 + S2 \cdot h2 = V$

Подстановка чисел (в системе СИ) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 100000 \cdot 2 = P1 \cdot (2 - h1) \\ P1 = 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot (h2 - h1) \\ 50 \cdot 10^{-4} \cdot h1 + 25 \cdot 10^{-4} \cdot h2 = 5 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Решения системы: P1 = 113070 Па, h1 = 0,231 м, h2 = 1,538 м

Б) Спустя длительное время в сосуде А воздух дополнился насыщенным паром воды, а в сосуде В воздух над водой остался чистым, т.к. из-за капли масла там отсутствует испарение. Испарение воды в сосуде А приводит к следующему:

1) Повышение давления смеси газов в сосуде А приводит к понижению уровня воды до величины h.
2) Это же понижение приводит к уменьшению давления воздуха в сосуде А (согласно закону Бойля – Мариотта).
3) Понижение уровня воды в сосуде А приводит к его повышению в сосуде В
4) Повышение уровня воды в сосуде В приводит к повышению давления воздуха в нем согласно закону Бойля – Мариотта

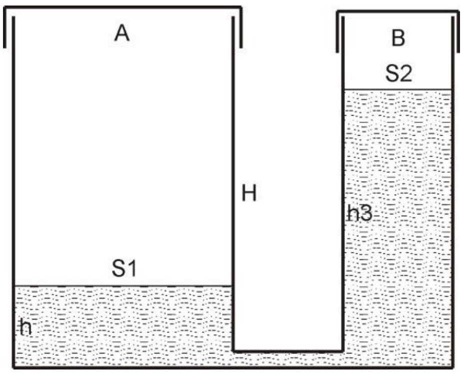


Рис. 4

Обозначим P2 – конечное давление воздуха в сосуде A, P_H – давление насыщенного пара воды в сосуде A, P3 – конечное давление воздуха в сосуде B, h3 – конечная высота уровня воды в сосуде B (см. рис. 4).

Для газов в сосуде A справедливы соотношения:

Закон Бойля – Мариотта для воздуха $P2\cdot(H-h)=P1\cdot(H-h1)$

Давление смеси газов в сосуде: $P2+P_H=P3+\rho\cdot g\cdot(h3-h)$

Связь между высотами воды в сосудах: $S1\cdot h+S2\cdot h3=V$

Для воздуха в сосуде B справедлив закон Бойля – Мариотта: $P0\cdot(H-h2)=P3\cdot(H-h3)$

Подстановка чисел (в системе СИ) приводит к системе уравнений

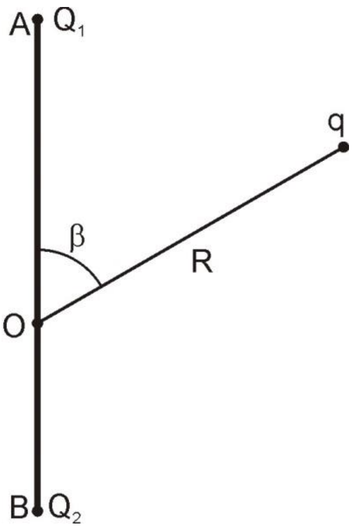
$$\begin{cases} P2\cdot(2-0{,}15)=113070\cdot(2-0{,}231) \\ P2+P_H=P3+1000\cdot10\cdot(h3-0{,}15) \\ 50\cdot10^{-4}\cdot0{,}15+25\cdot10^{-4}\cdot h3=5\cdot10^{-3} \\ 100000\cdot(2-1{,}538)=P3\cdot(2-h3) \end{cases}$$

Решение системы дает: P_H = 61381 Па

3. ***Решить задачу (25 баллов)***

На гладком горизонтальном столе лежит непроводящий стержень, к концам которого A и B прикреплены точечные заряды Q_1 и Q_2 одного знака. К точке O стержня привязана непроводящая нить длиной R с зарядом q того же знака на конце. Нить образует угол β = 60° со стержнем. Известны расстояния AO = 20 см, BO = 10 см, длина нити R = 15 см.

Чему равна величина заряда Q_1, если величина заряда Q_2 = 2 мкКл?



РЕШЕНИЕ

На заряд q действуют следующие силы (см. рис. 5): $\overrightarrow{F1}$ - сила взаимодействия с зарядом Q_1, $\overrightarrow{F2}$ - сила взаимодействия с зарядом Q_2, $\vec{T}$ - сила натяжения нити. В состоянии равновесия их векторная сумма должна равняться 0. Для вычисления сил Кулона удобнее всего воспользоваться координатным способом. Введем систему координат Oxy (см. рис. 5). Величины сил Кулона равны:

$$F1 = k\frac{Q_1 \cdot q}{r1^2}; F2 = k\frac{Q_2 \cdot q}{r2^2}$$

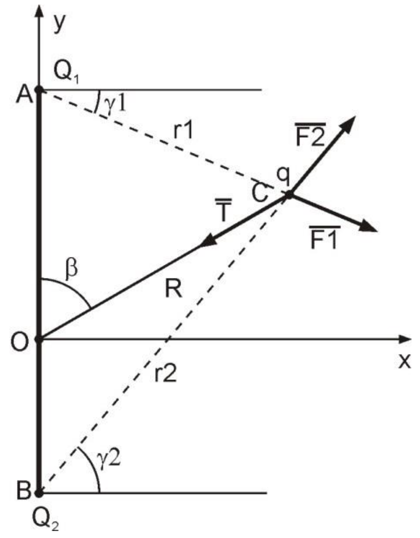


Рис. 5

Величины расстояний между зарядами найти легко:

$$r1 = AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2};$$

$$r2 = BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

Согласно условию задачи и рис. 5

$$x_A = 0; y_A = 0,2; x_B = 0; y_B = -0,1;$$

$$x_C = R \cdot \sin(\beta) = 0,15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; y_B = R \cdot \cos(\beta) = 0,075;$$

(числа даны в метрах)

Горизонтальная и вертикальная компоненты суммы этих сил (см. рис. 5):

$$F_x = F1 \cdot \cos(\gamma 1) + F2 \cdot \cos(\gamma 2) = \frac{k \cdot Q_1 \cdot q}{r1^2} \cdot \frac{(x_C - x_A)}{r1} + \frac{k \cdot Q_2 \cdot q}{r2^2} \cdot \frac{(x_C - x_B)}{r2} =$$

$$= k \cdot q \cdot \left(\frac{Q_1 \cdot (x_C - x_A)}{r1^3} + \frac{Q_2 \cdot (x_C - x_B)}{r2^3} \right)$$

$$F_y = F1 \cdot \sin(\gamma 1) + F2 \cdot \sin(\gamma 2) = \frac{k \cdot Q_1 \cdot q}{r1^2} \cdot \frac{(y_C - y_A)}{r1} + \frac{k \cdot Q_2 \cdot q}{r2^2} \cdot \frac{(y_C - y_B)}{r2} =$$

$$= k \cdot q \cdot \left(\frac{Q_1 \cdot (y_C - y_A)}{r1^3} + \frac{Q_2 \cdot (y_C - y_B)}{r2^3} \right)$$

Для равновесия заряда q необходимо, чтобы векторная сумма $\overrightarrow{F1} + \overrightarrow{F2}$ была направлена вдоль нити ОС, т.е.

$$\frac{F_X}{F_Y} = tg(\beta) = \frac{\dfrac{Q_1 \cdot (x_C - x_A)}{r1^3} + \dfrac{Q_2 \cdot (x_C - x_B)}{r2^3}}{\dfrac{Q_1 \cdot (y_C - y_A)}{r1^3} + \dfrac{Q_2 \cdot (y_C - y_B)}{r2^3}} = \frac{Q_1 \cdot (x_C - x_A) \cdot r2^3 + Q_2 \cdot (x_C - x_B) \cdot r1^3}{Q_1 \cdot (y_C - y_A) \cdot r2^3 + Q_2 \cdot (y_C - y_B) \cdot r1^3}$$

Подстановка чисел приводит к выражению:

$$x_C - x_A = 0,075\sqrt{3}; y_C - y_A = -0,125; r1 = 0,1803;$$

$$x_C - x_B = 0,075\sqrt{3}; y_C - y_B = 0,175; r2 = 0,2179;$$

$$\sqrt{3} = 0,075\sqrt{3} \cdot \frac{Q_1 \cdot 0,2179^3 + Q_2 \cdot 0,1803^3}{Q_1 \cdot 0,2179^3 \cdot (-0,125) + Q_2 \cdot 0,1803^3 \cdot 0,175}$$

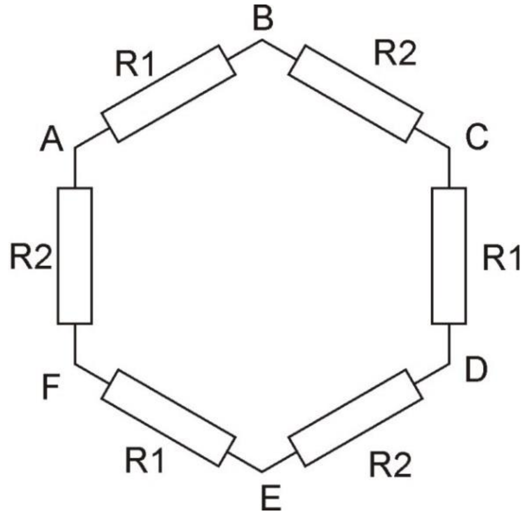
Путем преобразований и вычислений получается:

$$\boxed{Q_1 = 0,26 \cdot Q_2 = 0,52 \text{ мкКл}}$$

4. Решить задачу (20 баллов)

При подключении источника постоянного напряжения к точкам A и B электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, в цепи выделяется мощность P1 = 100 Вт. При подключении того же источника постоянного напряжения к точкам A и C в цепи выделяется мощность P2 = 72 Вт.

Какая мощность P3 будет выделяться в цепи при подключении того же источника постоянного напряжения к точкам A и D?



<u>РЕШЕНИЕ</u>

А) При подаче напряжения на контакты A и B сопротивление цепи будет

$$R_{AB}=\frac{R1\cdot(3\cdot R2+2\cdot R1)}{3\cdot(R1+R2)}$$

Мощность, рассеиваемая в цепи, будет

$$P1=\frac{U^2}{R_{AB}}=\frac{U^2\cdot 3\cdot(R1+R2)}{R1\cdot(3\cdot R2+2\cdot R1)}$$

Б) При подаче напряжения на контакты A и C сопротивление цепи будет

$$R_{AC}=\frac{2\cdot(R1+R2)}{3}$$

Мощность, рассеиваемая в цепи, будет

$$P2=\frac{U^2}{R_{AC}}=\frac{U^2\cdot 3}{2\cdot(R1+R2)}$$

В) При подаче напряжения на контакты A и D сопротивление цепи будет

$$R_{AD}=\frac{(2\cdot R1+R2)\cdot(2\cdot R2+R1)}{3\cdot(R1+R2)}$$

Искомая мощность, рассеиваемая в цепи, будет

$$P3=\frac{U^2}{R_{AD}}=\frac{U^2\cdot 3\cdot(R1+R2)}{(2\cdot R1+R2)\cdot(2\cdot R2+R1)}$$

Г) Отношение мощностей P2 и P1:

$$\frac{P2}{P1}=\frac{3}{2\cdot(R1+R2)}\cdot\frac{R1\cdot(3\cdot R2+2\cdot R1)}{3\cdot(R1+R2)}=\frac{3\cdot R1\cdot R2+2\cdot R1^2}{2\cdot R1^2+4\cdot R1\cdot R2+2\cdot R2^2}$$

Если разделить числитель и знаменатель на $R2^2$, обозначить $\frac{R1}{R2}=z$ и подставить (согласно условию задачи) $\frac{P2}{P1}=0,72$, то получится квадратное уравнение

$$0,72=\frac{3\cdot z+2\cdot z^2}{2\cdot z^2+4\cdot z+2}\Rightarrow 0,56z^2+0,12z-1,44=0$$

Решение уравнения дает $z=\frac{R1}{R2}=\frac{3}{2}\Rightarrow R1=\frac{3}{2}R2$

Д) Подстановка чисел в выражение для P2 дает:

$$72=\frac{3\cdot U^2}{2\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot R2+R2\right)}=\frac{3\cdot U^2}{5\cdot R2}\Rightarrow\frac{U^2}{R2}=120$$

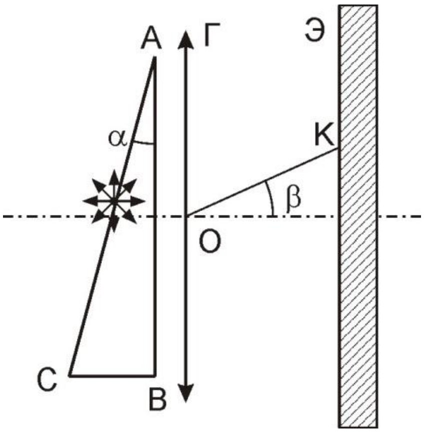
Е) После подстановка чисел в выражение для P3 получается:

$$P3=\frac{U^2\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{2}R2+R2\right)}{\left(2\cdot\frac{3}{2}R2+R2\right)\cdot\left(2\cdot R2+\frac{3}{2}R2\right)}=\frac{U^2}{R2}\cdot\frac{15}{28}=\frac{120\cdot 15}{28}=64,3\text{ Вт}$$

<u>Ответ</u>: мощность, рассеиваемая при подключении источника к точкам A и D, равна **64,3 Вт**

5. Решить задачу (15 баллов)

На поверхности AC стеклянной призмы ABC с преломляющим углом α = 20° помещен точечный источник света S. С другой стороны призмы помещена собирающая линза Г, причем сторона призмы AB перпендикулярна главной оптической оси линзы. В фокальной плоскости линзы помещается экран Э, также перпендикулярный главной оптической оси линзы. Благодаря источнику на экране можно наблюдать две области: освещенную и неосвещенную. Отрезок, соединяющий верхнюю точку границы между областями (точку K) с центром линзы составляет угол β = 25° с главной оптической осью линзы.



Определить показатель преломления материала призмы ABC.

<u>РЕШЕНИЕ</u>

А) Ход луча, идущего от источника света и имеющего наибольшее отклонение вверх от горизонта, изображен на рис. 6 - SFLM. Все лучи, идущие под этим углом к горизонту, после прохождения через линзу собираются в точке K. Лучи должны быть параллельными побочной оптической оси OK, поэтому угол наклона к горизонту этих лучей равен углу β.

Б) Из закона преломления $\sin(\gamma_1)=\dfrac{1}{n}$ (n – показатель преломления призмы)

В) Из ΔAFL $\gamma_2=180^0-\alpha-\left(90^0-\gamma_1\right)-90^0=\gamma_1-\alpha$

Г) Из закона преломления $\dfrac{\sin(\gamma_2)}{\sin(\beta)}=\dfrac{1}{n}$

Д) Из последнего равенства вытекает:

$$\sin(\beta)=n\cdot\sin(\gamma_2)=n\cdot\sin(\gamma_1-\alpha)=n\cdot\left(\sin(\gamma_1)\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\cos\right.$$

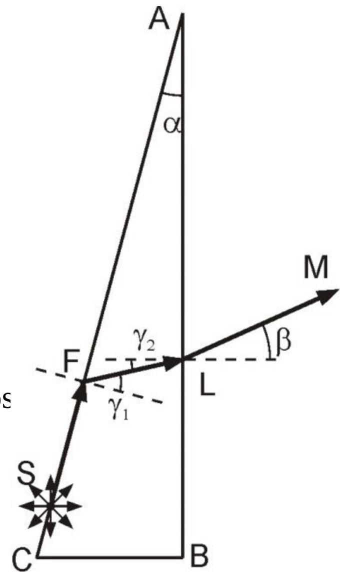


Рис. 6

Но

$$\sin(\gamma_1)=\frac{1}{n};\cos(\gamma_1)=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\Rightarrow\sin(\beta)=n\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right);$$

$$\sin(\beta)=\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cdot\sqrt{n^2-1}\Rightarrow n=\sqrt{\left(\frac{\cos(\alpha)-\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}\right)^2+1}$$

Подстановка: $n=\sqrt{\left(\dfrac{\cos\left(20^0\right)-\sin\left(25^0\right)}{\sin\left(20^0\right)}\right)^2+1}=1{,}81$